

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f, g \in \mathbb{R}[X]$ polinomok, $f = X^2 + X + 1$ és gyökei az x_1, x_2 komplex számok,

$g = aX^2 + bX + c$, $a \neq 0$, valamint az $A, V \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ mátrixok, $A = \begin{pmatrix} c & b & a \\ a & c & b \\ b & a & c \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x_1 & x_2 \\ 1 & x_1^2 & x_2^2 \end{pmatrix}$.

5p a) Igazold, hogy $\det(V) = 3(x_2 - x_1)$.

5p b) Igazold, hogy $A \cdot V = \begin{pmatrix} g(1) & g(x_1) & g(x_2) \\ g(1) & x_1 g(x_1) & x_2 g(x_2) \\ g(1) & x_1^2 g(x_1) & x_2^2 g(x_2) \end{pmatrix}$.

5p c) Igazold, hogy $\det(A) = 0$ akkor és csakis akkor, ha $a + b + c = 0$ vagy $a = b = c$.

2. Adott az $f: \mathbb{Z}_5 \rightarrow \mathbb{Z}_5$, $f(x) = x^4 + \hat{4}x$ függvény.

5p a) Számítsd ki az $f(\hat{0})$ és az $f(\hat{1})$ értékeket!

5p b) Igazold, hogy az f függvény nem szürjektív!

5p c) Bontsd fel irreducibilis tényezőkre \mathbb{Z}_5 felett az $X^4 + \hat{4}X \in \mathbb{Z}_5[X]$ polinomot!