EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $a, b, c \in \mathbb{Z}$ számok és az $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{pmatrix}$ mátrix.

5p **a)** Számítsd ki $\det(A)$ értékét!

5p **b)** Ha $a+b+c \neq 0$ és A nem invertálható mátrix a $\mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$ halmazban, igazold, hogy $a=b=c$.

5p **c)** Igazold, hogy az $\begin{cases} ax+by+cz=\frac{1}{2}x \\ cx+ay+bz=\frac{1}{2}y \\ bx+cy+az=\frac{1}{2}z \end{cases}$ egyenletrendszernek csak az $x=y=z=0$ megoldása van!

2. Az $f \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^4 - 5X^2 + 5$ polinom gyökei $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$.

5p **a)** Számítsd ki az $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}+\frac{1}{x_4}$ összeg értékét!

5p **b)** Igazold, hogy az f polinom minden gyöke valós!

5p **c)** Ha g egy olyan valós együtthatós polinom, amely teljesíti a $|g(x)| \leq |f(x)|$ egyenlőtlenséget $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén, igazold, hogy létezik olyan $a \in [-1, 1]$, amelyre $g = af$.