EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Az $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ számok esetén adott az $\begin{cases} ax+by+cz=b \\ cx+ay+bz=a \\ bx+cy+az=c \end{cases}$ egyenletrendszer, $x, y, z \in \mathbb{R}$.

5p **a)** Igazold, hogy a rendszer determinánsának értéke $\Delta=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc)$.

5p **b)** Oldd meg a rendszert abban az esetben, ha az kompatibilis és határozott!

5p **c)** Ha $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=0$, igazold, hogy a rendszernek végtelen sok olyan (x, y, z) megoldása van, amelyre $x^2+y^2=z-1$.

2. Adott a $G=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \middle| \ a,b,c \in \mathbb{Z}_4\right\}$ halmaz.

5p **a)** Határozd meg a G halmaz elemeinek számát!

5p **b)** Határozz meg egy olyan $A \in G$ mátrixot, amelyre teljesül, hogy $\det(A) \neq \hat{0}$ és $\det(A^2)=\hat{0}$.

5p **c)** Határozd meg az $X^2=\begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$, $X \in G$ egyenlet megoldásainak számát!