

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ és $B = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$ mátrixok, $t \in \mathbb{R}$.

5p a) Ha az $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix teljesíti az $AX = XA$ egyenlőséget, igazold, hogy létezik $a, b \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $X = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

5p b) Igazold, hogy $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén $B^n = \begin{pmatrix} \cos nt & -\sin nt \\ \sin nt & \cos nt \end{pmatrix}$.

5p c) Oldd meg az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmazban az $X^2 = A$ egyenletet!

2. Adott az $a \in \mathbb{R}$ szám és az $f = 3X^4 - 2X^3 + X^2 + aX - 1 \in \mathbb{R}[X]$ polinom.

5p a) Számítsd ki az $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4}$ összeget, ahol $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ az f polinom gyökei!

5p b) Határozd meg az f polinom $(X-1)^2$ polinommal való osztási maradékát!

5p c) Igazold, hogy az f polinomnak nem minden gyöke valós!