

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ mx + y + z = m - 1 \\ x + my + 2z = -1 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $m \in \mathbb{R}$ és az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & 1 & 1 \\ 1 & m & 2 \end{pmatrix}$ mátrix.

5p a) Határozd meg $m \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre $\det(A) = 0$.

5p b) Igazold, hogy bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén a rendszer kompatibilis!

5p c) Határozd meg $m \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a rendszernek olyan (x_0, y_0, z_0) megoldása van, amelyben $z_0 = 2$.

2. Adott az $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ halmaz $G = \left\{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z}_3) \mid X = \begin{pmatrix} a & \hat{2}b \\ b & a \end{pmatrix} \right\}$ részhalmaza, valamint az

$O_2 = \begin{pmatrix} \hat{0} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{0} \end{pmatrix}$ és $I_2 = \begin{pmatrix} \hat{1} & \hat{0} \\ \hat{0} & \hat{1} \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p a) Ha $x, y \in \mathbb{Z}_3$, igazold, hogy $x^2 + y^2 = \hat{0}$ akkor és csakis akkor, ha $x = y = \hat{0}$.

5p b) Igazold, hogy a $H = G - \{O_2\}$ az $\mathfrak{M}_2(\mathbb{Z}_3)$ halmaz invertálható mátrixaiból álló multiplikatív csoportjának részcsoportja!

5p c) Oldd meg az $X^2 = I_2, X \in G$ egyenletet!