

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az a, b, c valós számok, az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + 2x + 3$ függvény és az

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ f(a) & f(b) & f(c) \end{vmatrix} \text{ determinánsok.}$$

5p a) Igazold, hogy: $A = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$.

5p b) Igazold, hogy: $A = B$.

5p c) Igazold, hogy ha az f függvény grafikus képén felvesszünk három olyan különböző pontot, amelyek koordinátái természetes számok, a pontok által meghatározott háromszög területe egy 3-mal osztható természetes szám!

2. Adott az $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}$ mátrix és a $G = \{ X(a) = I_2 + aA \mid a \in \mathbb{R} \}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $\forall a, b \in \mathbb{R}$ esetén $X(a)X(0) = X(a)$ és $X(a)X(b) = X(a+b-10ab)$.

5p b) Igazold, hogy a $H = \left\{ X(a) \mid a \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{10} \right\} \right\}$ halmaz az $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ halmaz zárt részhalmaza a mátrixok szorzásra nézve!

5p c) Oldd meg az $X^2 = I_2$, $X \in G$ egyenletet!