

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Az $x \in \mathbb{C}$ esetén adott az $A(x) = \begin{pmatrix} x+1 & x^2-1 \\ 1 & x-1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ mátrix.

5p a) Igazold, hogy $(A(x))^2 = 2xA(x)$.

5p b) Határozd meg az összes x komplex számot, amelyekre $(A(x))^4 + (A(x))^2 = O_2$.

5p c) Igazold, hogy az $X^2 = A(0)$, $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ egyenletnek nincs megoldása!

2. Adott az $f \in \mathbb{C}[X]$, $f = (X+i)^{100} + (X-i)^{100}$ polinom, amelynek algebrai alakja

$$f = a_{100}X^{100} + a_{99}X^{99} + \dots + a_1X + a_0.$$

5p a) Számítsd ki az $a_{100} + a_{99}$ összeg értékét!

5p b) Határozd meg az f polinom $X^2 - 1$ polinommal való osztási maradékát!

5p c) Igazold, hogy az f polinom minden gyöke valós!