

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ és $A = aI_3 + bB + cB^2$ mátrixok, $a, b, c \in \mathbb{R}$.

5p a) Határozd meg a B^3 mátrixot!

5p b) Határozd meg a B^{-1} mátrixot!

5p c) Igazold, hogy $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$ esetén $(a+b+c)\det(A) \geq 0$.

2. Adott a $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ test és a $H = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Z}_7\}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $H = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{4}\}$.

5p b) Igazold, hogy bármely $a \in \mathbb{Z}_7$ esetén létezik $x, y \in \mathbb{Z}_7$ úgy, hogy $a = x^2 + y^2$.

5p c) Igazold, hogy $\{x^{2000} \mid x \in \mathbb{Z}_7\} = H$.