EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 9 & 6 \\ 2 & 6 & 4 \end{pmatrix}$, $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$,

$B = I_3 + A$, $C = I_3 + aA$, $a \in \mathbb{R}$ mátrixok.

5p **a)** Számítsd ki az $S = A - XY$ mátrixot!

5p **b)** Határozd meg az $a \in \mathbb{R}$ értékét úgy, hogy teljesüljön a $BC = I_3$ egyenlőség!

5p **c)** Igazold, hogy $A^{n+1} = 14A^n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

2. Adott az $f = X^3 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ polinom és az $\varepsilon \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ szám, amelyre $f(\varepsilon) = 0$.

5p **a)** Igazold, hogy $\varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$.

5p **b)** Oldd meg az $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y\varepsilon + z\varepsilon^2 = 0 \\ x + y\varepsilon^2 + z\varepsilon = 0 \end{cases}$ egyenletrendszert a komplex számok halmazán!

5p **c)** Ha az f polinom osztja az $f_1(X^3) + Xf_2(X^3) + X^2 f_3(X^3)$ polinomot, ahol f_1, f_2, f_3 komplex együtthatós polinomok, igazold, hogy az f_1, f_2, f_3 polinomok mindenike osztható az $(X - 1)$ polinommal!