

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. A $p, q, r \in \mathbb{C}$ számok esetén adott az
$$\begin{cases} x + py + p^2z = p^3 \\ x + qy + q^2z = q^3 \\ x + ry + r^2z = r^3 \end{cases}$$
 egyenletrendszer.

5p a) Igazold, hogy a rendszer determinánsának értéke $\Delta = (p - q)(q - r)(r - p)$.

5p b) Ha a p, q, r számok páronként különbözőek, oldd meg a rendszert!

5p c) Ha a $(-1, 1, 1)$ számhármás megoldása a rendszernek, igazold, hogy a p, q, r számok közül legalább kettő egyenlő!

2. Adott az $(A, +, \cdot)$ gyűrű, ahol $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_5 \right\}$.

5p a) Határozd meg az A halmaz elemeinek számát!

5p b) Oldd meg az $X^2 = I_2$ egyenletet az A halmazon!

5p c) Igazold, hogy az $(A, +, \cdot)$ struktúra nem test!