

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok és a $C(A) = \{ X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid XA = AX \}$ halmaz.

5p a) Igazold, hogy $B \in C(A)$.

5p b) Ha $X \in C(A)$, igazold, hogy léteznek $x, y \in \mathbb{R}$ számok úgy, hogy $X = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & x \end{pmatrix}$.

5p c) Oldd meg az $X + X^2 = A$ egyenletet!

2. Adott a $G = (-1, 1)$ halmaz, az $f : G \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$ függvény és az

$(x, y) \rightarrow x * y$ megfeleltetés, ahol $x * y = \frac{x+y}{1+xy}$, $\forall x, y \in G$.

5p a) Igazold, hogy ez a megfeleltetés egy belső művelet a G halmazon!

5p b) Igazold, hogy $f(x * y) = f(x)f(y)$, $\forall x, y \in G$ esetén!

5p c) Ha a "*" művelet asszociatív, számítsd ki az $\frac{1}{2} * \frac{1}{3} * \dots * \frac{1}{9}$ értéket!