

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok és az $f : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$f(X) = AX - XA \text{ függvény.}$$

5p a) Határozd meg az A mátrix rangját!

5p b) Számítsd ki $f(B)$ értékét!

5p c) Igazold, hogy az $f(X) = B$ egyenletnek nincs megoldása!

2. Adottak az $f, g \in \mathbb{R}[X]$, $f = X^3 + a^2X - a$, $g = aX^3 - a^2X^2 - 1$, $a \in \mathbb{R}^*$ polinomok és $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{C}$ az f polinom gyökei.

5p a) Számítsd ki az $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ összeg értékét!

5p b) Igazold, hogy a g polinom gyökei az f polinom gyökeinek inverzei!

5p c) Igazold, hogy az f és g polinomoknak nincsenek közös valós gyökei!