EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Tetszőleges $A \in M_2(\mathbb{C})$ mátrix esetén legyen $C(A) = \{X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \mid AX = XA\}$.

Adottak az $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrixok.

5p **a)** Ha $X, Y \in C(A)$, igazold, hogy $X + Y \in C(A)$.

5p **b)** Ha $E_1, E_2 \in C(A)$, igazold, hogy létezik olyan $\alpha \in \mathbb{C}$ szám amelyre $A = \alpha I_2$.

5p **c)** Ha a $C(A)$ halmaz tartalmaz három mátrixot az E_1, E_2, E_3, E_4 mátrixok közül, igazold, hogy akkor a negyedik mátrixot is tartalmazza!

2. Legyen $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ két permutáció az $(S_5, \cdot)$ csoportból.

5p **a)** Oldd meg az S_5 halmazban az $ax = b$ egyenletet!

5p **b)** Határozd meg az ab elem rendjét az $(S_5, \cdot)$ csoportban!

5p **c)** Legyen $k \in \mathbb{Z}$ úgy, hogy $b^k = e$. Igazold, hogy a k szám osztható hattal!