# EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

**II. FELADAT (30p)**

**1.** Az $A=\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ mátrix és az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok teljesítik az $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$ egyenlőséget $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén.

**5p** **a)** Igazold, hogy $x_{n+1}^2 + y_{n+1}^2 = (a^2+b^2)(x_n^2+y_n^2)$, $\forall n\in\mathbb{N}$ esetén!

**5p** **b)** Ha $a^2+b^2 \le 1$, igazold, hogy az $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sorozatok korlátosak!

**5p** **c)** Ha $a=1$ és $b=\sqrt{3}$, igazold, hogy $x_{n+6}=64x_n$, $\forall n\ge 0$ esetén!

**2.** Adott a $(\mathbb{Z}_{11},+,\cdot)$ test.

**5p** **a)** Igazold, hogy az $x^2=\hat{8}$ egyenletnek nincs megoldása a $\mathbb{Z}_{11}$ halmazban!

**5p** **b)** Határozd meg a $\mathbb{Z}_{11}[X]$ halmazban levő másodfokú polinomok számát!

**5p** **c)** Igazold, hogy az $X^2+X+\hat{1}$ polinom irreducibilis a $\mathbb{Z}_{11}[X]$-ben!