EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adottak az $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ és $\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ mátrixok,

amelyekre $\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ és $x_0 = 1$, $y_0 = 0$.

5p **a)** Számítsd ki x_1, x_2, y_1 és y_2 értékét!

5p **b)** Igazold, hogy $x_n + y_n\sqrt{2} = (3+2\sqrt{2})^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén!

5p **c)** Igazold, hogy $x_{n+2} - 6x_{n+1} + x_n = 0$, $\forall n \geq 0$ esetén!

2. Adottak a $\mathbb{Z}_7 = \{\hat{0}, \hat{1}, \hat{2}, \hat{3}, \hat{4}, \hat{5}, \hat{6}\}$ és $\mathbb{Z}_6 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}\}$ maradékosztály halmazok.

5p **a)** Oldd meg a $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$ testben a $\hat{3}x^2 + \hat{4} = \hat{0}$ egyenletet!

5p **b)** Határozd meg a $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ csoportban a $\hat{3}$ elem rendjét!

5p **c)** Igazold, hogy egyetlen olyan $f:(\mathbb{Z}_6, +) \to (\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ csoportmorfizmus sincs, amelyre $f\left(\overline{2}\right) = \hat{3}$.