

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrix, amelyre teljesül az  $A^2 = 2A$  egyenlőség.

5p a) Igazold, hogy a  $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$  mátrix teljesíti a  $B^2 = 2B$  egyenlőséget!

5p b) Ha  $a + d \neq 2$ , igazold, hogy  $A = O_2$  vagy  $A = 2I_2$ .

5p c) Ha  $a + d = 2$ , igazold, hogy  $\det(A) = 0$ .

2. Adottak az  $f, g \in \mathbb{Q}[X]$ ,  $f = X^4 - 1$ ,  $g = X^6 - 1$  polinomok.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  és  $g$  polinomok egy legnagyobb közös osztója az  $X^2 - 1$  polinom!

5p b) Határozd meg az  $f(x)g(x) = 0$  egyenlet különböző komplex megoldásainak számát!

5p c) Bontsd fel az  $f$  polinomot a  $\mathbb{Q}[X]$ -ben irreducibilis tényezőkre!