

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $M = \left\{ \begin{pmatrix} x & 3y \\ y & x \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{Z} \right\}$  halmaz és az  $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$  mátrix.

5p a) Ha  $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$  és  $AY = YA$ , igazold, hogy  $Y \in M$ .

5p b) Ha  $X \in M$  és  $\det X = 0$ , igazold, hogy  $X = O_2$ .

5p c) Igazold, hogy  $A^n \in M$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

2. Adott az  $f = X^5 - X^4 + 3X^3 - X^2 - 2 \in \mathbb{C}[X]$  polinom.

5p a) Határozd meg az  $f$  polinom egy egész gyökét!

5p b) Számítsd ki az  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_5^2$  összeg értékét, ahol  $x_1, x_2, \dots, x_5$  az  $f$  polinom gyökei.

5p c) Igazold, hogy az  $f$  polinomnak egyetlen valós gyöke van!