

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Tetszőlegesen  $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrixok esetén értelmezzük az  $[A, B] = AB - BA$  mátrixot.

5p a)  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrix esetén, számítsd ki az  $[A, A^2]$  mátrixot!

5p b) Igazold, hogy bármely  $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrix esetén  $[A, A^*] = O_2$ , ahol  $A^*$  az  $A$  adjungált mátrixa!

5p c) Igazold, hogy bármely  $A, B, C \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrixok esetén  $[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = O_2$ .

2. Adott a  $H = (0, 1)$  intervallum.

5p a) Igazold, hogy az  $a \circ b = \frac{ab}{ab + (1-a)(1-b)}$  egy belső művelet a  $H$  halmazon!

5p b) Igazold, hogy az  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, 1)$ ,  $f(x) = \frac{x}{x+1}$  függvény rendelkezik az  $f(xy) = f(x) \circ f(y)$  tulajdonsággal  $\forall x, y > 0$  esetén, ahol a „ $\circ$ ” az a) pontban értelmezett művelet!

5p c) Ha az a) pontban értelmezett „ $\circ$ ” művelet asszociatív, oldd meg a  $(H, \circ)$  struktúrában az  $x \circ x \circ x = \frac{1}{2}$  egyenletet!