

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x - y - mz = 1 \\ mx + y + mz = 1 - m \\ mx + 3y + 3z = -1 \end{cases}$$
 egyenletrendszer, $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Számítsd ki a rendszer mátrixának determinánsát!

5p b) Igazold, hogy bármely $m \in \mathbb{R}$ esetén a rendszer mátrixának rangja legalább 2.

5p c) Határozd meg az $m \in \mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a rendszer inkompatibilis!

2. Adott az $\alpha > 0$ valós szám és a $G_\alpha = (\alpha, \infty)$ halmaz. Az \mathbb{R} halmazon értelmezzük az $x * y = 3xy - 6(x + y) + 7\alpha$ műveletet.

5p a) Igazold, hogy $\alpha = 2$ esetén a $(G_2, *)$ struktúra kommutatív csoport!

5p b) Igazold, hogy $(G_2, *)$ és (\mathbb{R}_+^*, \cdot) izomorf csoportok, és egy izomorfizmusuk az

$$f : G_2 \rightarrow \mathbb{R}_+^*, f(x) = 3x - 6 \text{ függvény!}$$

5p c) Igazold, hogy bármely $\alpha \geq 2$ esetén a G_α zárt részhalmaza \mathbb{R} -nek a „*” műveletre vonatkozóan!