EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott a $\begin{cases} 2x-3y+4z-5t=-1 \\ x+9y+mz+t=3 \\ 5x-6y+10z+nt=p \end{cases}$ egyenletrendszer, $m,n,p\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Határozd meg p értékét úgy, hogy a rendszernek olyan (x_0,y_0,z_0,t_0) megoldása legyen, amelyre $z_0=t_0=0$.

5p **b)** Igazold, hogy bármely $m,n\in\mathbb{R}$ esetén a rendszer mátrixának rangja nagyobb, vagy egyenlő mint 2.

5p **c)** Határozd meg $m,n,p\in\mathbb{R}$ azon értékeit, amelyekre a rendszer kompatibilis és a rendszer mátrixának rangja 2.

2. Adottak a $Q_0=\left\{\frac{m}{n}\mid m,n\in\mathbb{Z},\ m,n \text{ páratlan számok}\right\}$ és $G=Q_0\times\mathbb{Z}$ halmazok. A G halmazon értelmezzük a $(q_1,k_1)*(q_2,k_2)=(q_1q_2,\ k_1+k_2)$, $\forall q_1,q_2\in Q_0$, $\forall k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ műveletet.

5p **a)** Igazold, hogy a $(G,*)$ struktúra kommutatív csoport!

5p **b)** Számítsd ki az $(1,1)*(1,2)*...*(1,10)$ értéket!

5p **c)** Igazold, hogy az $f:G\to\mathbb{Q}^*$, $f((q,k))=q\cdot 2^k$ függvény egy izomorfizmus a $(G,*)$ és $(\mathbb{Q}^*,\cdot)$ csoportok között!