EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az $\begin{cases} x+ay+(b+c)z=0 \\ x+by+(c+a)z=0 \\ x+cy+(a+b)z=0 \end{cases}$ valós együtthatós lineáris egyenletrendszer.

5p **a)** Számítsd ki a rendszer mátrixának determinánsát!

5p **b)** Igazold, hogy bármely $a,b,c\in\mathbb{R}$ esetén a rendszernek van a triviálistól különböző megoldása!

5p **c)** Oldd meg az egyenletrendszert, ha $a\neq b$ és az $(1,1,1)$ számhármas megoldása az egyenletrendszernek!

2. Adott a $G=\left\{\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix} \middle| \, x,y\in\mathbb{R},\ x^2+y^2\neq 0\right\}$ halmaz.

5p **a)** Igazold, hogy G zárt részhalmaza az $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ halmaznak a mátrixok szorzására vonatkozóan!

5p **b)** Igazold, hogy $(G,\cdot)$ kommutatív csoport!

5p **c)** Igazold, hogy az $f:(\mathbb{C}^*,\cdot)\to(G,\cdot)$, $f(x+iy)=\begin{pmatrix} x & iy \\ iy & x \end{pmatrix}$, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ függvény csoportizomorfizmus!