

EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Adott az
$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + (m^2 - m - 1)y + (m + 1)z = 2 \\ 2x + (m^2 - m - 2)y + 2(m + 1)z = 3 \end{cases}$$
 lineáris egyenletrendszer, $m \in \mathbb{R}$.

5p a) Igazold, hogy a rendszernek, akkor és csak akkor van egyetlen megoldása, ha $m \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

5p b) Igazold, hogy $m \in \{0, 1\}$ esetén a rendszer inkompatibilis!

5p c) Ha $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ a rendszer megoldása, igazold, hogy $x_0 - y_0 + 2009 \cdot z_0 = 1$

2. Adottak a $H = \{a^2 \mid a \in \mathbb{Z}_7\}$ és a $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{Z}_7, a \neq \hat{0} \text{ vagy } b \neq \hat{0} \right\}$ halmazok.

5p a) Határozd meg a H halmaz elemeit!

5p b) Legyen $x, y \in H$ úgy, hogy $x + y = \hat{0}$. Igazold, hogy $x = y = \hat{0}$.

5p c) Igazold, hogy a G halmaz a mátrixok szorzásával kommutatív csoportot alkot!