EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009

II. FELADAT (30p)

1. Legyen M azon valós számokból álló harmadrendű négyzetes mátrixok halmaza, amelyekben minden sor elemeinek összege nulla.

5p **a)** Ha $A, B \in M$, igazold, hogy $A + B \in M$.

5p **b)** Igazold, hogy az M halmaz egyetlen mátrixa sem invertálható!

5p **c)** Ha $A \in M$, igazold, hogy $A^2 \in M$.

2. Adottak a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] = \left\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ és $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \left\{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\}$ gyűrűk.

5p **a)** Ha $x \in \mathbb{R}$ és $x^2 = 3 + 2\sqrt{2}$, igazold, hogy $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$.

5p **b)** Igazold, hogy $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right] \cap \mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right] = \mathbb{Z}$

5p **c)** Bizonyítsd be, hogy nem létezik gyűrűmorfizmos a $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ és $\mathbb{Z}\left[\sqrt{3}\right]$ gyűrűk között!