

**EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2009**

**II. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$  mátrix.

5p a) Igazold, hogy  $\det(A \cdot A^t) \geq 0$ .

5p b) Ha  $A \cdot A^t = A^t \cdot A$ , igazold, hogy  $(a-d)(b-c) = 0$ .

5p c) Ha  $(A - A^t)^{2009} = A - A^t$ , igazold, hogy  $|b-c| \in \{0,1\}$ .

2. Adott a  $(\mathbb{Z}_7, +, \cdot)$  test.

5p a) Oldd meg a  $\mathbb{Z}_7$  halmazban a  $\hat{2}x = \hat{3}$  egyenletet!

5p b) Igazold, hogy a  $p = \hat{2}X^2 + \hat{4} \in \mathbb{Z}_7[X]$  polinomnak nincsenek gyökei a  $\mathbb{Z}_7$  halmazban!

5p c) Bizonyítsd be, hogy az  $f: \mathbb{Z}_7 \rightarrow \mathbb{Z}_7$ ,  $f(x) = \hat{2}x$  függvény a  $(\mathbb{Z}_7, +)$  csoport egy automorfizmusa!