III. FELADAT (30p)

1. Adott az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat, amelyben $a_1 \in (0,1)$ és $a_{n+1} = a_n\left(1-\sqrt{a_n}\right), \forall n\in \mathbb{N}^*$.

5p **a)** Igazold, hogy $a_n \in (0,1), \forall n\in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p **b)** Igazold, hogy az $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő!

5p **c)** Ha $b_n = a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2, \forall n\in \mathbb{N}^*$, igazold, hogy a_1 a $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sorozat egy felső korlátja!

2. Adott az $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x) = \dfrac{1}{x^2+x+1}$ függvény.

5p **a)** Igazold, hogy a $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x) = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2x+1}{\sqrt{3}}\right), x\in\mathbb{R}$ függvény az f egy primitív függvénye!

5p **b)** Határozd meg a $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x) = (2x+1)f(x)$ függvény grafikus képe, az Ox tengely valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenesek által határolt területet!

5p **c)** Számítsd ki a $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-n}^{n} f(x)dx$ határértéket, ahol $n\in \mathbb{N}^*$.