

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \ln x - \frac{2(x-1)}{x+1}$ függvény.

5p a) Számítsd ki az f függvény deriváltját!

5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képeinek azon pontjait, amelyekben a grafikus képhez húzott érintő párhuzamos a $9y = 2x$ egyenletű egyenessel!

5p c) Ha $x > 1$, igazold, hogy $\ln x \geq \frac{2(x-1)}{x+1}$.

2. Adott az $f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ függvény és az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat,

ahol $a_n = f(1) + f(2) + \dots + f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x) dx \leq f(k)$, $\forall k \in (0, \infty)$ esetén!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$ határértéket, ahol $n \in \mathbb{N}$.

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!