

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{x \ln x}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy $f'(x) = f(x)(1 + \ln x)$, $\forall x > 0$.

5p b) Határozd meg az f függvény minimumát!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex a $(0, \infty)$ intervallumon!

2. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}^*$ szám esetén adottak az $f_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x}$ és

$g_n : (-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + f_n(x)$ függvények.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 g_2(x) dx$ értéket!

5p b) Igazold, hogy $0 \leq \int_0^1 f_n(x) dx \leq \frac{1}{2n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right)$ határértéket!