

Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + \cos x$ függvény és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $x_0 = 0$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}$ sorozat.

5p a) Igazold, hogy az f függvény növekvő az \mathbb{R} - en!

5p b) Igazold, hogy $0 \leq x_n \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén!

5p c) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens és határértéke $\frac{\pi}{2}$.

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ valós számsorozat úgy, hogy $I_0 = \frac{\pi}{2}$ és $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x dx, n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat csökkenő!

5p c) Igazold, hogy $nI_n I_{n-1} = \frac{\pi}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén!