

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \arctg x - \ln(1+x^2)$  függvény.

5p a) Igazold, hogy az  $f$  konvex függvény  $\mathbb{R}$ -en!

5p b) Igazold, hogy az  $f'$  függvény korlátos!

5p c) Igazold, hogy  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  esetén!

2. Adott az  $(I_n)_{n \geq 1}$ ,  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^{2n}} dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  sorozat.

5p a) Számítsd ki  $I_1$  értékét!

5p b) Igazold, hogy:  $I_n \leq \frac{1}{n+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$  határértéket!