

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin^n x$ függvény, ahol $n \in \mathbb{N}^*$ és $n \geq 3$. Jelölje x_n az f_n függvény grafikus képe inflexiós pontjainak abszcisszái közül azt, amely a $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ intervallumban van.

5p

a) Igazold, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $f_n''(x) = n(n-1)\sin^{n-2} x - n^2 \sin^n x, \forall n \in \mathbb{N}^*, n \geq 3$.

5p

b) Igazold, hogy $\sin x_n = \sqrt{\frac{n-1}{n}}, \forall n \geq 3$.

5p

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ határértéket!

2. Adottak az $f, F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^3 - 3x + a}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}, F(x) = \frac{x^2 + ax + 5}{\sqrt{x^2 + 1}}$ függvények, ahol $a \in \mathbb{R}$.

5p

a) Igazold, hogy az F függvény az f függvény egy primitív függvénye!

5p

b) Ha $a = 2$, számítsd ki az f függvény grafikus képe, az Ox tengely, valamint az $x = 1$ és $x = 2$ egyenletű egyenesek által határolt síkidom területét!

5p

c) Határozd meg a értékét úgy, hogy $\int_0^2 F(x)dx - \int_{-2}^0 F(x)dx = 2$ legyen!