

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Értelmezzük minden $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ esetén az $f_n : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = x^n - nx + 1$ függvényeket.

5p

a) Igazold, hogy az f_n szigorúan csökkenő a $[0;1]$ intervallumon és szigorúan növekvő az $[1; \infty)$ intervallumon!

5p

b) Igazold, hogy az $f_n(x) = 0$, egyenletnek két $a_n \in (0;1)$ és $b_n \in (1; \infty)$ megoldása van, ha $x > 0$.

5p

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ határértéket, ahol a_n a b) alpontban értelmezett számsorozat!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat, ahol $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx$ és $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x^2 + 1} dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

a) Igazold, hogy $I_0 = \frac{\pi}{4}$.

5p

b) Igazold, hogy $I_{2n} = \frac{1}{2n-1} - I_{2n-2}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ esetén!

5p

c) Igazold, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \cdot \frac{1}{2n-1} \right) = I_0$.