

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. TÉTEL (30p)**

1. Adott az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat úgy, hogy  $x_1 \in (0,1)$  és  $x_{n+1} = \frac{x_n^5 + 3x_n}{4}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Igazold, hogy  $x_n \in (0,1), \forall n \in \mathbb{N}^*$  esetén!

5p b) Igazold, hogy az  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat konvergens!

5p c) Igazold, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+2}}{x_n} = \frac{9}{16}$ .

2. Adott az  $xf(x) = \sin x, \forall x \in \mathbb{R}$  tulajdonsággal rendelkező  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  függvény.

5p a) Számítsd ki az  $\int_0^\pi x^2 f(x) dx$  értékét!

5p b) Igazold, hogy az  $f$  függvény integrálható a  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  intervallumon!

5p c) Igazold, hogy  $\int_1^\pi f(x) dx \leq \cos 1$ .