

**Ministerul Educatiei, Cercetării și Inovării**  
**Centrul National pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \ln^2 x$  függvény .

5p a) Igazold, hogy a függvény konvex a  $(0, e]$  intervallumon!

5p b) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p c) Igazold, hogy az  $(a_n)_{n \geq 3}$ ,  $a_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \frac{\ln 5}{5} + \dots + \frac{\ln n}{n} - f(n)$  sorozat csökkenő!

2. Adott az  $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \cos x$  függvény.

5p a) Számítsd ki az  $f$  függvény grafikus képe és a koordinátatengelyek által határolt síkidom területét!

5p b) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének  $Ox$  tengely körüli forgatásával keletkező forgástest térfogatát!

5p c) Számítsd ki a  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - f\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$  határértéket!