

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \operatorname{arctg} x - \operatorname{arcctg} x$  függvény.

5p

a) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képének aszimptotáját a  $+\infty$ -ben!

5p

b) Igazold, hogy az  $f$  függvény szigorúan növekvő  $\mathbb{R}$ -en!

5p

c) Ha  $x_{n+1} = f(x_n)$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  és  $x_1 = 0$ , igazold, hogy az  $(x_n)_{n \geq 1}$  sorozat konvergens!

2. Adott az  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \arcsin x$  függvény.

5p

a) Igazold, hogy az  $g: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = x \cdot f(x)$  függvénynek vannak primitív függvényei, amelyek szigorúan növekvő függvények!

5p

b) Számítsd ki az  $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx$  értékét!

5p

c) Igazold, hogy:  $\int_0^1 xf(x) dx \leq \frac{\pi}{4}$ .