

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)\arcsin x$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2 - x}$ határértéket!

5p b) Határozd meg azokat a pontokat, amelyekben a függvény nem deriválható!

5p c) Igazold, hogy az f függvény konvex!

2. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4$

és az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvények.

5p a) Igazold, hogy az F függvény szigorúan növekvő \mathbb{R} -en!

5p b) Igazold, hogy az F függvény bijektív!

5p c) Számítsd ki az $\int_0^a F^{-1}(x) dx$ határozott integrál értékét,

ha F^{-1} az F függvény inverz függvénye és $a = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$.