

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \{x\}(1 - \{x\})$ függvény,

ahol $\{x\}$ az x valós szám törtrészét jelöli.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x)$ határértéket!

5p b) Határozd meg az f függvény folytonossági tartományát!

5p c) Határozd meg az összes olyan pontot, amelyben az f függvény nem deriválható!

2. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2 - \sin x}$ és

$F : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ függvények.

5p a) Számítsd ki az $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \cos x dx$ értékét!

5p b) Igazold, hogy a F függvény szigorúan növekvő!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x)$ határértéket!