

III. FELADAT (30p)

1. Adottak az $f_n, g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots - x^{2n-1} + x^{2n}$, $g_n(x) = x^{2n+1} + 1$ függvények, ahol $n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Igazold, hogy $f_n'(x) = \frac{g_n'(x)}{x+1} - \frac{g_n(x)}{(x+1)^2}$, $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ esetén!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n' \left(\frac{1}{2} \right)$ határértéket!

5p c) Igazold, hogy az f_n függvénynek pontosan egy helyi szélsőérték-pontja van!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, ahol $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^3} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_2 értékét!

5p b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ szigorúan csökkenő sorozat!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!