

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$ függvény.

5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ határértéket!

5p b) Számítsd ki az f függvény másodrendű deriváltját!

5p c) Igazold, hogy $f(x) \leq 0, \forall x \geq 0$ esetén!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1+x}{1+x^2}$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvénynek egy primitív függvénye az $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \arctg x + \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1)$ függvény!

5p b) Számítsd ki az $\int_0^1 f(x) dx$ értékét!

5p c) Ha $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{n+k}{n^2+k^2}, \forall n \in \mathbb{N}^*$, igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!