

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \operatorname{arctg}(x+2) - \operatorname{arctg} x$ függvény.

5p a) Számítsd ki: $f'(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

5p b) Igazold, hogy $0 < f(x) \leq \frac{\pi}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Igazold, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + \operatorname{arctg} \frac{(x+1)^2}{2}$ függvény egy állandó függvény!

2. Adottak az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^3}{3} - x + \operatorname{arctg} x$ és $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \operatorname{arctg} x$ függvények.

5p a) Számítsd ki $\int_1^2 \frac{f'(x)}{x} dx$ értékét!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^3} \int_0^x f(t) dt$ határértéket!

5p c) Számítsd ki annak a síkidomnak a területét, amelyet a két függvény grafikus képe, valamint az $x=0$ és $x=1$ egyenletű egyenesek határolnak!