

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ függvény

és az $(a_n)_{n \geq 1}, a_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{n\sqrt{n}}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ sorozat.

5p a) Igazold, hogy az f' függvény szigorúan növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p b) Igazold, hogy $\frac{1}{2(k+1)\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{2k\sqrt{k}}, \forall k \in \mathbb{N}^*$ esetén!

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \geq 1}$ sorozat konvergens!

2. Adottak az $f_n: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \int_0^x t^n \operatorname{arctg} t \, dt, \forall n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Igazold, hogy $f_1(x) = \frac{x^2+1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2}, \forall x \geq 0$ esetén!

5p b) Igazold, hogy $f_n(1) \leq \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{n+1}, \forall n \geq 1$ esetén!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} n f_n(1)$ határértéket!