

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(x + \frac{3}{2}\right) + \ln\left(x + \frac{1}{2}\right)$ függvény és az

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}, \quad a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} - \ln\left(n + \frac{1}{2}\right), \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \text{ sorozat.}$$

5p a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $(0, +\infty)$ intervallumon!

5p b) Igazold, hogy $f(x) < 0$, $\forall x \in (0, +\infty)$ esetén!

5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat szigorúan csökkenő!

2. Adottak az $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_n(x) = \int_0^x t^n \arcsin t \, dt$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ függvények.

5p a) Határozd meg az f_3 függvény deriváltját!

5p b) Számítsd ki $f_1\left(\frac{1}{2}\right)$ értékét!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f_2(x)$ határértéket!