

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \ln(e^x + 1)$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f' függvény szigorúan csökkenő \mathbb{R} -en!

5p b) Igazold, hogy $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a f(x) = 0$, $\forall a \in \mathbb{R}$ esetén!

5p c) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáit!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, ahol $I_n = \int_0^2 (2x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy $(2n + 1)I_n = 2nI_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$ esetén!

5p c) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat csökkenő és tart a zéróhoz!