

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 3x + 3\arctg x$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő \mathbb{R} -en!

5p b) Igazold, hogy az f függvény bijektív!

c) Határozd meg azokat az a valós számokat,

5p amelyekre a $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x^a}$ határérték létezik, véges és nullától különböző!

2. Adott az $(I_n)_{n \geq 1}$ sorozat úgy, hogy $I_n = \int_0^1 x^n e^x dx, \forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p a) Számítsd ki az I_1 értékét!

5p b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!

5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ határértéket!