

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln x$ függvény.

5p

a) Tanulmányozd az f függvény monotonitását!

5p

b) Határozd meg a függvény grafikus képének aszimptotáit!

5p

c) Ha $x_0 \in (0, 1)$ és $x_{n+1} = e^{f(x_n)}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén,
igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sorozat konvergens!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{4x+5} dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

5p

a) Számítsd ki az I_2 értékét!

b) Igazold, hogy az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat $\forall n \in \mathbb{N}^*$ esetén

5p

teljesíti a $4I_{n+1} + 5I_n = \frac{1}{n+1}$ egyenlőséget!

5p

c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} nI_n$ határértéket!