

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x$ függvény

és az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat úgy, hogy $x_1 = 1$ és $x_{n+1} = f(x_n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Igazold, hogy az f' függvény szigorúan növekvő \mathbb{R} -en!
5p b) Határozd meg az f függvény grafikus képének aszimptotáját $-\infty$ -ben!
5p c) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!

2. Adott az $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat, ahol $I_n = \int_0^1 (x - x^2)^n dx$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

- 5p a) Számítsd ki I_2 értékét!
5p b) Igazold, hogy $I_n = \frac{n}{4n+2} I_{n-1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$.
5p c) Számítsd ki a $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n$ határértéket!