

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^{-x}$ függvény.

- 5p** a) Igazold, hogy az f függvény szigorúan növekvő a $[0, +\infty)$ intervallumon!
- 5p** b) Igazold, hogy az f függvénynek pontosan egy helyi szélsőérték-pontja van!
- 5p** c) Határozd meg az $f(x) = m$ egyenlet valós megoldásainak számát az m valós paraméter függvényében!

2. Adottak az $f: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \int_1^{\operatorname{tg} x} \frac{t}{1+t^2} dt$

és $g: \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \int_1^{\operatorname{ctg} x} \frac{1}{t(1+t^2)} dt$ függvények.

- 5p** a) Számítsd ki az $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ értékét!
- 5p** b) Számítsd ki az $f'(x)$, $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ függvényt!
- 5p** c) Igazold, hogy $f(x) + g(x) = 0$, $\forall x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ esetén!