

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ függvény.

- 5p a) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ határértéket!
- 5p b) Határozd meg az f függvény deriválhatósági tartományát!
- 5p c) Igazold, hogy az f függvénynek két szélsőérték-pontja van!

2. Adott az $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ függvény

és az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $a_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \sqrt{n^2 - k^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ sorozat.

- 5p a) Számítsd ki az $\int_0^1 x f(x) dx$ értékét!
- 5p b) Számítsd ki az f függvény grafikus képének Ox tengely körüli forgatásával származtatott forgástest térfogatát!
- 5p c) Igazold, hogy az $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sorozat konvergens!