

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \sin \frac{1}{x}$  függvény.

5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  határértéket!

5p b) Számítsd ki:  $f'(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^*$ .

5p c) Határozd meg az  $f$  függvény grafikus képéhez a  $+\infty$ -ben húzott aszimptota egyenletét!

2. Adott az  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  sorozat úgy, hogy  $I_n = \int_{-1}^1 (1-x^2)^n dx$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p a) Számítsd ki az  $I_2$  értékét!

5p b) Igazold, hogy  $I_{n+1} = \frac{2n+2}{2n+3} I_n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ .

5p c) Igazold, hogy az  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ ,  $a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k C_n^k}{2k+1}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  sorozat határértéke zéró!