

**Ministerul Educației, Cercetării și Inovării**  
**Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar**

**III. FELADAT (30p)**

1. Adott az  $f : [1, \infty) \rightarrow [1, \infty)$ ,  $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x}$  függvény.

5p a) Számítsd ki a  $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - f(x))^x$  határértéket!

5p b) Igazold, hogy az  $f$  szigorúan növekvő függvény!

5p c) Igazold, hogy az  $f$  bijektív függvény!

2. Legyen  $a, b \in \mathbb{R}$  és adott az  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = \begin{cases} ax + b, & x < 1 \\ \ln^2 x + 1, & x \geq 1 \end{cases}$  függvény.

5p a) Határozd meg az  $a$  és  $b$  számokat úgy, hogy az  $F$  függvény, egy  $f$  függvénynek primitív függvénye legyen!

5p b) Számítsd ki az  $\int_1^e \frac{1}{x F(x)} dx$  értékét!

5p c) Igazold, hogy a  $h : [1, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h(x) = (F(x) - 1) \sin x$  függvény esetén  $\int_1^\pi h(x) h''(x) dx \leq 0$ .