

Ministerul Educației, Cercetării și Inovării
Centrul Național pentru Curriculum și Evaluare în Învățământul Preuniversitar

III. FELADAT (30p)

1. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 1$ függvény.

5p a) Igazold, hogy az $(x_n)_{n \geq 1}, x_1 = \frac{1}{2}$ és $x_{n+1} = f(x_n), \forall n \geq 1$ sorozatnak van határértéke!

5p b) Igazold, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \begin{cases} xf(x), & x \leq 0 \\ \arctg x, & x > 0 \end{cases}$ függvény deriválható \mathbb{R} -en!

5p c) Határozd meg az a valós szám legnagyobb értékét úgy, hogy az $f(x) \geq a + 2 \ln x$ egyenlőtlenség igaz legyen $\forall x \in (0, \infty)$ esetén!

2. Adott az $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{-x^2}$ függvény és legyen F egy primitív függvénye.

5p a) Számítsd ki $\int_0^1 xf(x) dx$ értékét!

5p b) Számítsd ki a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(\cos x) - F(1)}{x^2}$ határértéket!

5p c) Igazold, hogy a $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = F(x) + f(x)$ függvénynek egyetlen helyi szélsőérték-pontja van!